Pozitivni redovi

Doc. dr Nevena Mijajlović

Računarstvo i informacione tehnologije, PMF

Matematika 3

Pozitivni redovi

Definicija

Red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

naziva se **red sa pozitivnim članovima** ili **pozitivan red** ako je

$$a_k \geq 0 \text{ za svako } k \in \mathbb{N}.$$

Definicija

Red $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ naziva se **red sa negativnim članovima** ili **negativan red** ako je $a_k \leq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$.

- Red koji ima konačno mnogo negativnih članova, a svi ostali su nenegativni, takodje zovemo pozitivnim redom.
- Analogno, red je negativan i ako je konačno mnogo njegovih članova pozitivno.

Primjer: Red $-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + \cdots$ je pozitivan red.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-3)$$

Neka je

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

pozitivan red. Tada je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k,$$

pa važi

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dakle, niz parcijalnih suma (S_n) je rastući. Ukoliko je niz (S_n)

1^0 ograničen $\Longrightarrow$ konvergentan

2^0 nije ograničen $\Longrightarrow$ divergentan. Pri tome, zbog $S_{n+1} \geq S_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, niz (S_n) odredjeno divergira ka $+\infty$.

Teorema 1

Pozitivan red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

je konvergentan ili odredjeno divergira ka $+\infty$.

Teorema 2

Pozitivan red

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

je konvergentan ako i samo ako je niz parcijalnih suma (S_n) ograničen.

Dokaz. Pokazali smo da je niz (S_n) rastući i da iz ograničenosti niza (S_n) slijedi konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Sada pokažimo obrnuto.

Neka je $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentan red. Tada postoji zbir $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i važi

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + R_n.$$

Kako je $a_k \geq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$, to je $R_n \geq 0$, pa je

$$S \geq S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Dakle, niz (S_n) je ograničen. $\boxdot$

Napomena: Rastući niz (a_n) je uvek ograničen odozdo svojim prvim članom jer je

$$a1 \leq a_2 \leq \cdots$$

Zato se ograničenost niza svodi na ograničenost s gornje strane. Analogno, ograničenost opadajućeg niza znači ograničenost s donje strane.
U prethodnim teoremama smo imali rastući niz parcijalnih suma (S_n), pa smo pod ograničenošću podrazumijevali ograničenost odozgo.

Vratimo se na negativne redove i posmatrajmo $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sa $b_k \leq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Neka je $a_k = |b_k|$. Tada je $b_k = -a_k$ i

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k) = -\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

pa redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ su istovremeno konvergentni ili divergentni. Pri tome, ako je $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, tada je $-S = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Ako $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ odredjeno divergira ka $+\infty$, tada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ odredjeno divergira ka $-\infty$.

Zaključujemo da je dovoljno razmatrati samo pozitivne redove.

Koristan primjer za formiranje konvergentnih i divergentnih redova:

Neka je (M_n) rastući niz za koji je $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$.

Formiramo pozitivne redove:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(M_{k+1} - M_k), \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}}\right), \tag{2}$$

Kako je

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(M_{k+1} - M_k) = M_{n+1} - M_1$$

$$T_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}}\right) = \frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_{n+1}}.$$

Tada je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} M_{n+1} - M_1 = +\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{M_1} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{M_{n+1}} = \frac{1}{M_1}.$$

Dakle, red (1) odredjeno divergira ka $+\infty$, a red (2) konvergira ka $\frac{1}{M_1}$,

$$\frac{1}{M_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right).$$

$\boxdot$

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Postavimo $M_n = \ln n, \quad n \in \mathbb{N}$. Niz (M_n) je rastući jer je $M_n = \ln n < \ln(n+1) = M_{n+1}$ i važi

$$\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty.$$

Kako je

$$M_{k+1} - M_k = \ln(k+1) - \ln k = \ln\frac{k+1}{k} = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

tada je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (M_{k+1} - M_k),$$

pa red divergira.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Postavimo $M_n = n, \quad n \in \mathbb{N}$. Niz (M_n) je rastući i važi $\lim_{n\to\infty} M_n = +\infty$. Kako je

$$\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

to je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{M_{k+1}} \right)$$

pa je dati red oblika (2). Zato red konvergira i ima sumu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{M_1} = 1.$$

Poredbeni kriterijumi konvergencije

Navodimo nekoliko teorema kojima su uspostavljeni kriterijumi za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova. Kriterijumi su zasnovani na uporedjvanju članova reda, pa otuda potiče ime poredbeni kriterijumi.

Teorema 3

Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pozitivni redovi za čije članove važi

$$a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tada iz konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ slijedi konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Takodje, iz divergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ slijedi divergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Teorema 4

Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pozitivni redovi i neka je $b_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Ako je

$$L = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k},$$

gdje je $0 < L < +\infty$, redovi $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ su istovremeno konvergentni ili divergentni.

Teorema 5

Neka su $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ i $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ pozitivni redovi i neka je $a_k b_k \neq 0$ za svako $k \in \mathbb{N}$. Ako je

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

tada iz konvergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ slijedi konvergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, a iz divergencije reda $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ slijedi divergencija reda $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Primjer: Ispitati konvergenciju reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Pokazali smo da je red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ konvergentan. Kako je za svako $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{1}{2k^2},$$

pa red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2}$$

je konvergentan. Tada je, prema Teoremi 3, konvergentan i red $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. $\boxdot$

Primjer: Ispitati konvergenciju harmonijskog reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Utvrdili smo da red

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

divergira. Neka je

$$a_k = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \quad b_k = \frac{1}{k}$$

$$\frac{a_k}{b_k} = k \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \to \ln e = 1, \text{ za } k \to \infty.$$

Dakle, harmonijski niz je divergentan. $\boxdot$